UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO DE CARACAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

CÁTEDRA DE FÍSICA TEÓRICA

FÍSICA MODERNA

SERIE DE MATERIALES INSTRUCCIONALES

NATURALEZA ONDULATORIA DE LA MATERIA

Introducción

Si bien ya en el siglo XIX estaba plenamente aceptada la idea de que todos los cuerpos están compuestos de átomos, no se conocía aún la estructura de éstos. El comienzo de la evolución de esta idea, estuvo relacionado con la necesidad de entender la estructura átomica y da su primer gran paso con el descubrimiento del electrón por J.J Thomson (1856-1940). Otro avance fue el descubrimiento de la radiactividad por el investigador francés Pierre Curie (1859-1906) y su esposa Marie Aklodowska Curie (1867-1934), quines realizaron una memorable serie de experimentos, iniciados alrededor 1898 y continuados durante muchos años, e identificaron diversas sustancias radiactivas. El tercer hito fue el reconocimiento reconocimiento de que los átomos están constituidos por un núcleo positivo y por electrones en movimiento alrededor de éste. El magnifico descubrimiento fue consecuencia del análisis de los experimentos con partículas $\boldsymbol{\alpha}$ realizados en 1911 por el físico inglés Erneste Rutherford.

EL cuarto paso fundamental fue la formulación en 1913 de la teoría cuántica del átomo por el científico Niels Bohr (1885-1962). De este modo, en un período de menos de 20 años se pasó de la ignorancia casi completa a un conocimiento fundamentalmente correcto de la estructura atómica.

Sin embargo, en el período siguiente, desde 1920 hasta el presente, los progresos en nuestro conocimiento y el crecimiento de la estrctura coceptual de la física con la construcción de nuevos y mejores conceptos acrca de la materia confomraron un espectacular y vertiginoso progreso en la ciencia física. Entre 1924 y 1926, las investigaciones de Edwin Schroedinger, Werner Heisenberg, Paul Dirac y Louis de Broglie ***condujeron al desarrollo de una nueva técnica u aproximación***, denominada ***Mecánica Cuántica***, para estudiar el comportamiento de las partículas que componen los átomos. Asimismo se descubruó la radioactividad artificial. Se construyeron máquinas capaces de acelerar partículas hasta energías de cientos y aun miles de $\boldsymbol{MeV}$**,** que han permitido producir en el laboratorio diversas reacciones nucleares y descubrir nuevas partículas elementales. Posiblemente el más espactacular de los descubrimientos subsiguientes ha sido el da la ***fisión nuclear***, seguido unos años después por el de la humanidad, por su empleo en las llamadas bombas atómicas y por sus aplicaciones civiles, espcialmente como nuevas fuentes de energía para producir a su vez energía eléctrica en las conocidas plantras ***nucleoeléctricas***.

Bien, durante el desarrollo del curso hemos podido estudiar el comportamiento de la luz algunas veces como onda y otras como partícula. Esto llevó a Louis De Broglie a presentar una hipótesis que consistia en afirmar que la materia también debería tener ***carácter dual***. La idea de De Broglie se centraba en aosociar a la partícula una longitud de onda que se asocia a su momentum por medio dela relación: $\lambda = h/p$. Unos años más tarde, un contundente experimento verificaba la predicción de la hipotesis de de Broglie. En el experimento se pudo observar que cuando los electrones de un haz inciden en yn cristal dan lugar a una figura de difracción (¡si de difracción!) caracteristica como todos ya sabemos, de una onda. Este descubrimiento de ***las ondas de materia*** nos daria finalmente una nueva imagen de la realidad y una reinterpretación de los fenómenos naturales a nivel atómico, pasando a ser la ***Mecánica Cuántica*** la clave de nuestro conocimiento y comprensión actual del mundo moderno, permitiendo la

construcción de una nueva realidad llena de desarrollos tecnológicos, los cuales como ya conocemos cuasan impactos directos en nuestra sociedad y en nuestra forma de vivir.

Ondas materiales

Hasta ahora hemos considerado la radiación EM como un movimiento ondulatorio, porque pueden producirse con ella fenómenos de interferencia y de difracción. Por otra parte, ya hemos visto en los materiales anteriores (efecto fotoeléctrico y Compton) que cuando la radiación EM interacciona con la materia, como en los procesos de emisión, absorción y difusión, se comporta como si consistiese en partículas o corpúsculos, los cuales hemos llamado fotones, con momentun y energía dados por:

$$(\boldsymbol{I}) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{momentun}: \boldsymbol{p} = \dfrac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{\lambda}} \\ \boldsymbol{energ\acute{i}a}: \boldsymbol{E} = \boldsymbol{hf} \end{cases}$$

Al ver (I) , podemos notar que estamos en la presencia de ***dos modelos***, para la radiación EM: uno ondulatorio y otro corpuscular. Estos modelos no son contradictorios, sino ***complementarios*** (nuevo concepto), porque cada uno se emplea en circunstancias diferentes. En ciertos fenómenos debemos considerar la radiación EM como un movimiento ondulatorio, mientras que enotros es necesario considerarla como partícula.

La pregunta que es natural hacernos ahora es la siguiente: ***¿si objetos fisicos que en nuestra noción fundamental consideramos como partículas: protones, electrones y neutrones, deben también ser considerados en ciertas circunstancias como movimientos ondulatorios?***.

Esta pregunta fue la base principal de la idea que presentó el físico francés de Broglie en 1924, quién sugirió que las partículas elementales se comportan en algunos casos como ondas cuya longitud y frecuencia, de acuerdo a ***(I)***, deben estar asociadas con el momentun y la energía de las partículas por la expresiones:

$$(\boldsymbol{II}) \qquad \boldsymbol{\lambda} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{p}}\,, \qquad \boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{h}}\,.$$

Estas ondas fueron llamadas por de Broglie ***ondas de materia***, ya que están sociadas con las partículas consituyentes de la materia. Las expresiones ***(II)*** relacionas, como podemos ver, caracteristicas corpusculares de una partícula con sus características ondulatorias.

Para comprobar si la hipótesis de de Broglie es correcta, es necesario realizar experimentos cuya interpretación requiere la aplicación de las relacones dadas por *(II).* El estudio de las ondas materiales asociadas a las partículas dio origen a la ***Mecánica Ondulatoria, que, más tarde, formó junto con otra rama de la física llamada Mecánica Cuántica, una teoría completa y consistente de todos los fenómenos físicos a nivel átomico-molecular.***

A primera vista, parece tenerse la impresión de que los conceptois de onda y de partícula fueran inconsistentes, ya que una partícula está caracterizada por su ***masa***, su ***tamaño*** y ***localización***, su ***momentun*** y ***energía***; en cambio, la onda ***no tiene masa***, se ***extiende sobre una región del espacio*** y ***no puede decirse que tenga un tamaño determinado***, aunque también posee ***momentun*** y ***energía***. Son características de la onda su ***amplitud***, su ***longitud de onda*** y su ***frecuencia***.

Sin embargo, cuando vamos al mundo de los muy pequeño, como son las partículas elementales, estas claras oposiciones entre ambos conceptos se atenúan si se admite lo que parece ser la realidad: ***la imposibilidad de localizar una partícula en el espacio.*** Con estos se desea decir que cuando una partícula elemental se mueve, sus posiciones aparecen como difuminadas y esparcidas sobre una pequeña región, mostrando así una de las propiedades que se consideran características de las ondas.

Bases experimentales de las relacionbes de de Broglie

Durante toda la carrera, siempre recalcamos, que la mejor manera de comporbar las prediciones realizadas por una hipótesis es la reaalización de experimentos que permitan realizar esta corroboración. En el caso de la expresiones de de Broglie, es necesario montar un experimento que se pueda comprobar que las ondas materiales, si existen, deben presentar difracción e interferencia, como ocurre con las ondas EM y mecánicas.

Históricamente, varios ham conformaron ela hipótesis de de Broglie, en esta material sólo se nombrarán algunos.

1. **Difracción de electrones por un cristal**: el físico inglés G.P. Thompson, en 1927, lanzó un haz de electrones acelerados por un voltaje ***V*** contra un cristal:

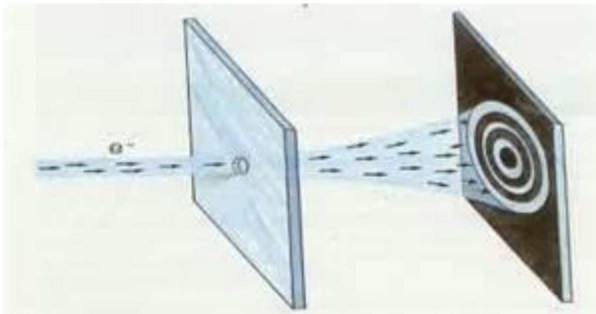


Figura 1. Una aproximación al montaje experimental realizado por Thompson, el haz de electrones a la izquierda de la pantalla incide sobre el cristal, se observa en la pantalla fluorescente o en una película fotografica a la derecha del cristal, un patrón de dispersión similar al caracteristico de las ondas cuando inciden en una ranura circular, formando una serie de anillos brillantes concéntricos.

La distribución de los electrones dispersados por el cristal se estudiaba colocando una pantalla fluorescente o una película fotográfica al otro lado del cristal. De este modo, Thompson obtuvo patrones de dispersión semejantes a los obtenidos por Laue para los rayos $\boldsymbol{X}$**.** En la foto, de la **figura 2**, se ilustra un patrón de dispersión de electrones producido por un cristal de grafito. Esto indica que para ciertas direcciones se produce una interferencia con un refuerzo (interferencia constructiva) de las ondas materiales asociadas a los electrones que han sido dispersados por el cristal.

Figura 2. Patrón de dispersión de electrones producido por un cristal de grafito.

2. **Experimento de Davisson y Germer:** casi al moismo tiempo que Thompson, estos físicos norteamericanos, realizaron un experimento similiar al de Bragg emplenado rayos $\boldsymbol{X}$. En este experimento se lanza un haz de electrones acelerados por un voltaje $\boldsymbol{V}$ contra un cristal en una dirección que forma un ángulo $\boldsymbol{\theta}$ con una de las caras del cristal. Mediante un detector de electrones, se registran los electrones dispersados en la dirección simétrica que forma también un ángulo $\boldsymbol{\theta}$ con la cara del cristal. Manteniendo fijo el voltaje , puede modificarse el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ para determinar las direcciones en las que se produce un máximo de electrones dispersados. Se calcula entonces la longitud de onda de los electrones, aplicando la consición de Bragg (esta ecuación ya la vimos en el material sobre el efecto Compton). Se comprueba con este experimento, que el valor experimental de $\boldsymbol{\lambda}$ coincide con el valor propuesto por de Broglie, $\boldsymbol{\lambda = h/p}$.

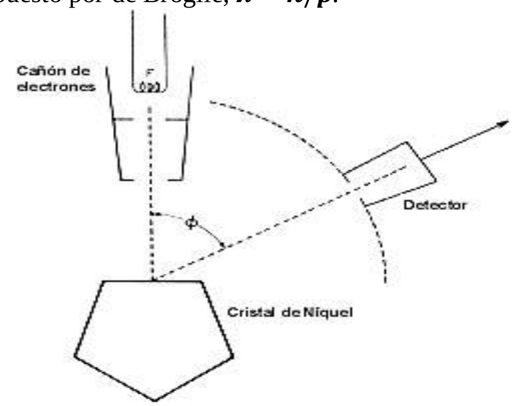


Figura 3. Experimento de Davisson y Germer.

3. **Interferencia y difracción de electrones**: si recordamos nuestra discusión de la interferencia de ondas luminosas, tenemos que, para poder producir estas interferencias, es necesario dividir un haz luminoso en otros dos, ya sea mediante dos ranuras, como en el experimento de Young, o por cualquier otro procedimiento similar. Por consiguiente, para observar la interferencia de ondas materiales electrónicas (o de cualquier clase de partícula), es necesario producir u haz de electrones que sea separado en dos por algún procedimiento. Al volver a reunirse ambos haces, dan lugar a un

patrón de interferencia. La **figura 4**, ilustra uno de estos experimentos.

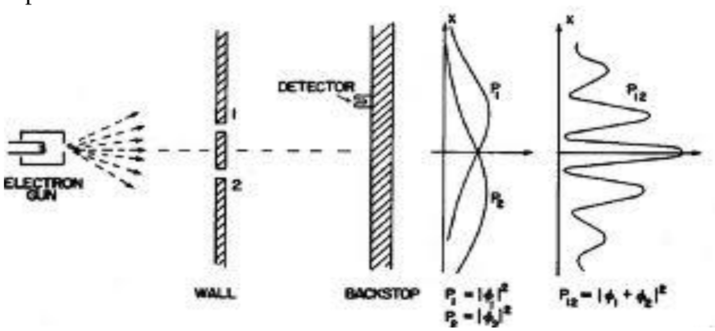


Figura 4. $|\phi_1|^2$ y $|\phi_2|^2$ representan las intensidades del haz separado en dos. $|\phi_1 + \phi_2|^2$ la intensidad electrónica en la pantalla.

Un haz de electrones pasa por una doble abertura, la curva de la **figura 4**, ilustra la curva que da la variación de la intensidad electrónica en el patrón de difracción observado en la pantalla cuando el haz electrónico atraviesa la doble rendija. El ángulo que subtiende el máximo central de interferencia está dado por $\theta = 2\lambda/b$, siendo b la separación entre las rendijas. Podemos, por tanto, aceptar como bien fundada experimentalmente la hipótesis de que las partículas tales como los electrones, neutrones, protones, etc., pueden describirse, en determinadas circunstancias, como si fueran un movimiento ondulatorio. Esto quiere decir que los electrones, protones, neutrones, etc., ***no pueden ser considerados como si fueran pequeñísimas esferas, sino como entidades mucho más complejas que describimos por conveniencia como partículas o como ondas, según las circunstancias.***

Descripción de las ondas materiales

Lo estudiado en los párrafos anteriores, nos permite admitir que las particulas se pueden describir mediante ***ondas materiales***. El próximo paso conciste en investigar la relación que existe entre esas ondas y otras propiedades conocidas de las partículas. Para empezar, designaremos la amplitud de las ondas materiales por la letra griega $\boldsymbol{\psi}$ (psi), de acuerdo con la costumbre ya establecida en cursos anteriores de ondas. Este símbolo representa una ***amplitud*** la cual se denomina ***función propia de la partícula***, la ***forma de esta función*** depende del ***movimiento de la partícula y de las fuerzas que actúan sobre ella***.

Consideremos ahora una partícula libre que se mueve en línea recta con energía $\boldsymbol{E}$ y momentun $\boldsymbol{p}$. La onda material correspondiente tiene una longitud de onda $\boldsymbol{\lambda = h/p}$ y frecuencia $\boldsymbol{f = E/h}$. Como puede apreciarse en la **figura 5**, se trata de una onda armónica.

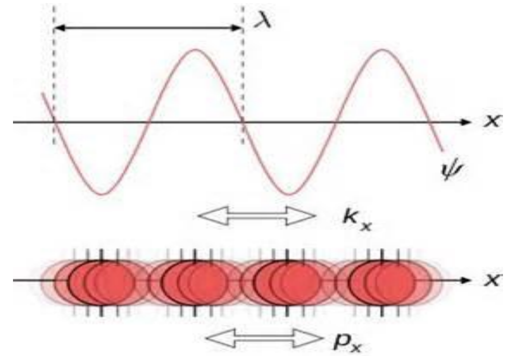


Figura 5. Onda material.

¿ Qué significado físico puede tener esta amplitud constante? Para responder a esta pregunta haremos una comparación con otras ondas que hemos estudiado. Recodermos que la ***energía de un oscilador es proporcional al cuadrado de la amplitud de las oscilaciones*** y la ***intensidad de una onda es proporcional a la energía***. Luego, ***la intensidad de una onda elkástica es proporcional al cuadrado de la amplitud***. Podemos ampliar esta regla para incluir a las ondas materiales y admitir que si intensidad es proporcional al cuadrado de su amplitud., o sea: $\boldsymbol{\psi^2}$. Pero surge ahora una nueva pregunta: **¿qué debemos entender por intensidad de una onda material?**

Las ondas materiales están asociadas con partículas y parece lógico, por eso, pensar que deben ser más iuntensas en el lugar donde se encuentra la partícula que describen o, si dicha partícula está en movimiento, deben ser más intensas en aquellos lugares por donde pasa la partícula. Según esto, vamos a formular la siguiente regla o criterio:

$$\boldsymbol{\psi^2} \equiv \begin{cases} \textit{intensidad de las ondas materiales; indica los} \\ \textit{lugares donde es más probable que se encuentre} \\ \textit{la partícula o por los cuales es más probable} \\ \textit{que ella pase} \end{cases}$$

En otras palabras, cuanto mayor es el cuadrado de la función propia, mayor es la probabilidad de que la partícula sew encuentre en ese lugar o pase por él. En cierto modo, la función propia sirve para precisar o definir la trayectoria. Pero obsérvese que hemos empleado la palabra ***"probabilidad"*** y que con ello queremos decir que estamos reconociendo la dificultad de definir y precisar la posición y por ende la trayectoria de una particula. Esta es una de las novedades que trae la introducción del concepto de ondas materiales. En efecto, por una parte, la noción de partículas se refiere a un ente u objeto físico bien localizado en el espacio y en el tiempo, como lo definine la noción determinista la mecánica clásica. Por consiguiente, al representar una partícula mediante una ondaa material, perdemos información sobre la localización de la partícula y ello significa que en lugar de hablar de la "trayectoria" de la partícula, debemos referirnos a las regiones donde es más probable que ésta se encuentre porque en ellas su onda material es más intensa. Este nuevo punto de vista consituye un cambio radical respecto al modo en que estamos acostumbrados a describir el movimiento de los cuerpos (en todos los cursos anteriores a este), pero se aplica solamente al movimiento de partículas fundamentales que componen la materia, y no a cuerpos macroscópicos como uan pelota, un automovil, etc. El hecho de que la onda de la **figura 5**, tenga una amplitud constante implica que ls ondas materiales tienen la misma intensidad en todas partes, lo que significa que hay la misma probabilidad de encontrar la partícula en cualquier parte. O, dicho en otros términos, si una partícula se mueve con un momentun y energía bien definidos, con movimiento correspondiente al de una onda armónica de amplitud constante, no podemos obtener información exacta acerca del lugar donde se encuentra.

Pero podemos hacernos ahora un nueva pregunta: ¿Qué ondas materiales pueden describir una partícula que se encuentra en una región del espacio de dimensión Δx? En virtud de lo explicado, la respuesta a esta pregunta es que la amplitud de las ondas materiales debe ser apreciable en la región Δx donde encuentre la partícula y muy pequeña o prácticamente nula en el resto del espacio. Este tipo de onda ha sido representado en la **figura 6** y constituye lo que se llama un **"paquete de ondas"**. ¿Qué significado tiene este paquete de ondas?

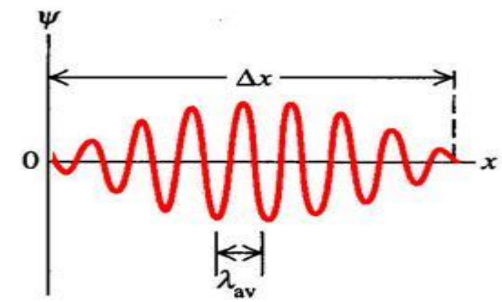


Figura 6. Paquete de ondas.

Sin comparamos la **figura 6** con la **figura 5**, podemos apreciar que un paquete de ondas no es una onda armónica. Un paquete de ondas se forma mediante el proceso de interferencia de varias ondas armónicas que tengan diversas longitudes de onda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, ajustando sus fases para que haya interferencia con refuerzo (constructiva) en la región Δx e interferencia con atenuación (destructiva) fuera de esa región. En efecto, puede comprobarse que, seleccionando debidamente la amplitud y la fase de la onda correspondiente a cada longitud de onda, puede lograrse un paquete de ondas como el de la **figura 6**. La técnica matemática e como hacer esto la repasaremos en la sección de problemas próxima.

Pero ahora resulta que la partícula descrita por el paquete de ondas de la **figura 6**, no está asociada a una longitud de onda única, sino a varias. En virtud de la relación $\boldsymbol{\lambda = h/p}$**, tenemos que el momentun de la partícula tampoco está bien definida** y puede tener valores $\boldsymbol{p_1, p_2, p_3}$,..., correspondientes a las longitudes de onda $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}, \ldots$, que compone el paquete. Por tanto, el momentum de la partícula se conoce con una cierta imprecisión $\Delta \boldsymbol{p}$. Recapitulando lo que acabamos de explicar, se deduce que si sabemos que la partícula se encuentra en una región de dimensión $\Delta \boldsymbol{x}$**, de modo que** $\Delta \boldsymbol{x}$ **es la impresición con que conocemos la posición de la**

partícula, resulta que su momentun se debe conocer con una impresición Δp. **Un cáculo detallado demuestar que Δx y Δp no son independientes, sini que están relacionados por la expresión**

$$\Delta x \Delta p \geq h,$$

que se llama ***relación de incertidumbre de Heisenberg***, porque fue propuesta en 1927 por el físico alemán Werner Heisenberg (1901-1974). Esta relación expresa la ***imposibilidad*** de conocer a la vez con absoluta presición la posición y el momentum de una partícula. ***Cuanto mayor sea la presición con que conocemos la posición (menor Δx), mayor será la impresición con que conocemos el momentum ($mayor$ Δp); la relación inversa también es cierta.***

Esta conclusión no es consecuencia de que nuestros instrumentos de medida sean deficientes, sino del hecho de que, por la naturaleza misma de las partículas elementales, no es posible medir a la vez con presición la posición y el momentum de una partícula; es decir, es consecuencia del aspecto ondulatorio de la misma. Cuánto mejor lleguemos a conocer alguna de estas dos magnitudes, má deficiente será el concimiento que tendremos de la otra. Los aparatos de medición sólo son capaces de darnos facetas parciales de un objeto cuántico, dado el carácter clásico de los primeros. Sólo tenemos acceso a la interrelación ***objeto cuántico-aparato de medición***; no tenemos acceso al objeto cuántico "en sí".

Finalmente, la Mecánica Cuántica plantea una situación nueva; ya no es posible tener imágenes intuitivas de los distintos procesos cuánticos; en cierta medida los distintos experimentos parecieran proporcionarnos imágenes de "algunas facetas" del mundo cuántico; sin embargo, si tratamos de aunar toda la información experimental mediante una única imagen clásica, nuestro esquema resulta inevitblemente incoherente.

Si la materia está acompañada de una onda: ¿Qué es lo que está ondulando en el espacio y en el tiempo?

La función de onda o función propia como la denominamos anteriormente, contiene toda la información acerca del estado de una partícula y en general es una cantidad compleja que no es observable.

Es decir, no se puede definir en términos de algo tangible, como es el caso de una onda sonora (presión, desplazamiento) o de una onda electromagnética (campo eléctrico y magnético). La explicación fue dada en 1920 por el físico alemán Marx Born quien propuso que, el cuadrado del modulo de $\boldsymbol{\psi}$ se podía interpretar como una ***densidad de probabilidad*** , de forma tal que, en un instante dado, $|\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})|^2 \boldsymbol{dx}$ representa la probabilidad de que la partícula se encuentre en la región $\boldsymbol{dx}$ alrededor de $\boldsymbol{x}$. Como la partícula debe estar con certeza en algún lado, la suma de todas las probabilidades sobre todos los posibles valores de $\boldsymbol{x}$ **debe ser igual a 1 (condición de normalización):**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})|^2 \boldsymbol{dx} = \mathbf{1}$$

Ondas de de broglie y átomo de Bohr

Uno de los explicaciones utilizadas por de Broglie para darle soporte a su teoría fue que la naturaleza ondulatoria de los electrones era consistente con el modelo semuclásico del átomo de Borh, estudiado en el material anterior. La onda electrónica en una órbita permitida del átomo debe ser una onda ***estacionaria*** que se cierra sobre si misms en una circunsferencia. Si esto no fuera así, entonces presentaría interferencia destructiva conforme el electrón circula en la órbita y la onda rápidamente tendería a extinguirse.

Según la hipótesis de de Broglie las únicas ondas que permanecen como ondas estacionaarias serían aquellas para las cuales la longitud de la circunsferencia es un número entero de longitudes de onda:

$$2\pi r_n = n\lambda = n\frac{h}{mv} \Rightarrow L = mvr_n = n\hbar$$

Esta es precisamente la condición de Bohr para la cuantización del momento angular que permite deducir las órbitas y niveles de energía discretos del átomo.

GUÍA DE PROBLEMAS DE LAPIZ Y PAPEL VIII

1. Un electrón es acelerado a través de una diferencia de potencial de $20\,000\,V$. Esta es, por ejemplo, la energía de los electrones en un

tubo de televisión. Calcular la longitud de onda y la frecuencia de las ondas materiales asociadas con el electrón. Calcule también la velocidad de de propagación de las ondas materiales correspondientes. Demuestre que la velocidad de las ondas materiales asociadas a la partícula es la mitad de la velocidad de las partículas.

2. a. Pruebe que la longitud de onda de De Broglie asociada a una partícula que tiene energía en reposo $m_o c^2$ y energía cinética K, es:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{K(K + 2m_o c^2)}}$$

b. Consiga una expresión para el fotón a partir de la relación obtenida en a.

c. Halle la λ asociada a electrones cuya energía cinética es dos veces el valor de su energía en reposo.

3. Después de estudiar de acuerdo con la hipótesis de De Broglie que las partículas de momentum p tiene características de onda con longitud de onda $\lambda = h/p$, a un estudiante de $80\,kg$ le ha interesado saber mucho si se difractará cuando pase por el clero de una puerta de $75\,cm$ de ancho. Suponiendo que ocurrirá una difracción importante cuando el ancho de la apertura de difracción sea menor que 10 veces la longitud de onda que se está difractando.
   a. Determine la máxima velocidad a la cual el estudiante puede pasar a través del claro de la puerta para que se difracte de manera considerable.
   b. ¿Con esa velocidad cuánto tardará el estudiante en travesar la puerta si ésta tiene $15\,cm$ de espesor? Compare este resultado con la edad aceptada del universo, la cual es de $4 \times 10^{17}\,s$
   c. ¿Le debe preocupar al estudiante ser difractado?
4. Un niño sobre una escalera de altura H, deja caer metras de masa m al piso, tratando de pegarle a una fisura en el piso. Para apuntar, utiliza equipo de la más alta precisión.
   a. Demuestre que las metras no caerán en la fisura por una distancia del orden $\sqrt{h/m}\sqrt[4]{H/2g}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad.
   b. Si $H = 2.0\,m$ y $m = 0.50\,g$, ¿cuál es Δx?
5. Una partícula reducida a moverse dentro de una región limitada del espacio, es un buen modelo para describir el comportamiento de un electrón en un átomo, también el de un electrón libre en un metal dentro del metal o una partícula en un recipiente que contiene un gas. Las fuerzas atractivas no dejan en ningún caso que la partícula abandone del recinto (el átomo, el metal o el gas). Ahora suponga que para reducir este problema consideramos una partícula de masa m que se mueve con una velocidad v entre dos paredes separadas por una distancia a. Considere la onda material asociada a la partícula encerrada.
   a. Analice el movimiento de la partícula desde el punto de vista ondulatorio.
   b. Demuestre que la λ asociada a la partícula está dada por $\lambda = 2a/n$.
   c. Obtenga los estados de energía permitidos para la partícula.
   d. Calcule la mínima energía necesaria para excitar un electrón libre que se mueve en un cristal metálico cuya dimensión es $10 \times 10^{-9}\,m$.
   e. Ahora considere que la partícula está confinada a moverse con M.C.U, obtenga el momentum angular de la partícula. Compare este resultado con la condición de Bohr ¿Qué concluye?
6. La energía cinética total de una partícula que se mueve con movimiento armónico simple a lo largo del eje x en un sistema masa-resorte es:

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

   a. Empleando el principio de incertidumbre, muestre que esta expresión puede escribirse también como:

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k\hbar^2}{2}$$

   b. Muestre que la energía cinética mínima del oscilador armónico es:

$$K_{mín} = \frac{p_x^2}{2m} = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

7. El procedimiento matemático para construir un paquete de ondas es superponiendo un gran número de ondas sinusoidales de longitudes de onda diferentes con una distribución de amplitudes apropiadas, por medio de la integral de Fourier:

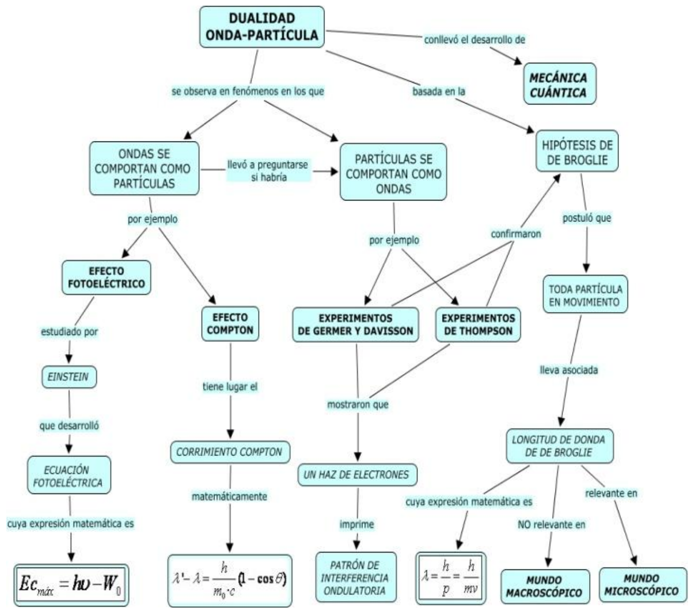
$$\psi(x) = \int A\cos(kx)dk$$

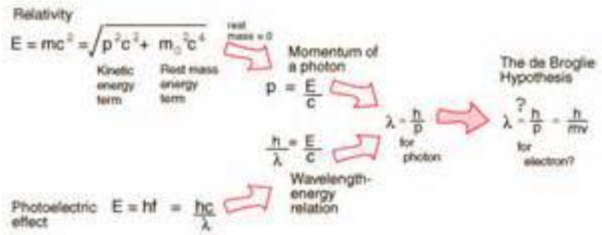
Determine la forma de la función propia asociada al paquete de ondas.

8. Imagínese un portero que desea atrapar un disparo que le realizan al arco en un mundo hipotético en donde la constante de Planck no es la que conocemos sino $6.63\ Js$. ¿Cuál sería la indeterminación de la posición del balón de fútbol de masa $410\ g$ (medida de la FIFA) que se mueve a una velocidad $30\ m/s$ con una incertidumbre en la velocidad del 3%?
9. Como ya lo estudiamos, una partícula puede ser representada por un paquete de ondas. Demuestre que la velocidad del la partícula es igual a la velocidad de grupo del correspondiente paquete de ondas.
10. Aplique la condición de normalización para obtener la constante A para una partícula atrapada en una caja profunda de anchura L si la función propia que la representa es:

$$\Psi = Asen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Ahora suponga que la partícula está en una caja de paredes rígidas separadas por una distancia L. Obtenga la probabilidad de que la partícula se encuentre dentro de la caja a una distancia $L/3$ de una de las paredes, tanto para el estado cuántico $n = 3$, como para la física clásica.




Relativity
Kinetic energy term
Rest mass energy term
Momentum of a photon
The de Broglie Hypothesis
for photon
for electron?
Wavelength-energy relation
Photoelectric effect